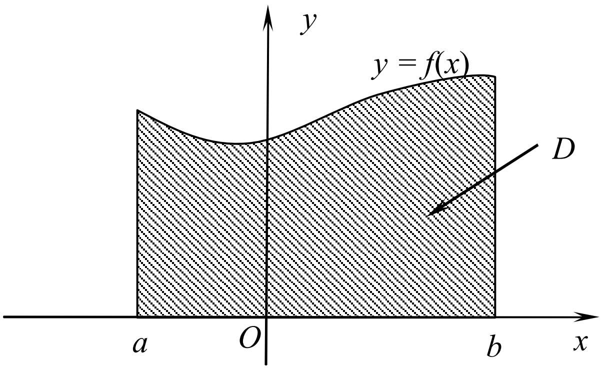
Całka oznaczona - interpretacja geometryczna

Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ jest nieujemna w przedziale $\langle a,b\rangle$, to całka oznaczona tej funkcji w granicach od a do b przedstawia pole $|D|$ obszaru płaskiego D (tzw. *trapezu krzywoliniowego* - rysunek 2) ograniczonego krzywą o równaniu $y=f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x=a$ i $x=b$.
Możemy zatem zapisać

(2) $$|D|=\int_a^b f(x)dx.$$

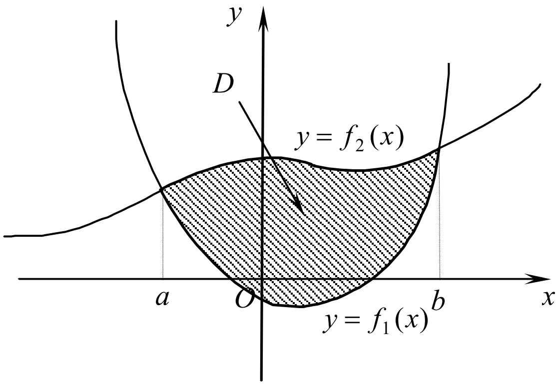
Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ jest niedodatnia w przedziale $\langle a,b\rangle$, to

(3) $$|D|=-\int_a^b f(x)dx.$$



Rys. 2. Trapez krzywoliniowy

Bezpośrednio z interpretacji geometrycznej wynika możliwość zastosowania całki oznaczonej do obliczania pól obszarów płaskich ograniczonych przecinającymi się krzywymi.



Rys. 3. Ilustracja do wzoru (4)

Niech D będzie obszarem płaskim powstałym w wyniku przecięcia się wykresów funkcji f_1 i f_2 (przy czym wykres funkcji f_2 ogranicza obszar D od góry, a wykres funkcji f_1 ogranicza obszar D od dołu) ciągłych w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdzie a i b są odciętymi punktów przecięcia się krzywych oraz niech $f_1(x) \le f_2(x)$ dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ (rysunek 3). Obszar D można zatem zapisać w postaci:

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}.$$

Wówczas słuszny jest następujący wzór

(4)
$$|D| = \int_a^b [\underbrace{f_2(x)}_{\text{"górna" funkcja}} - \underbrace{f_1(x)}_{\text{"dolna" funkcja}}]\,dx$$

Przykład. Obliczyć pola następujących obszarów płaskich D:

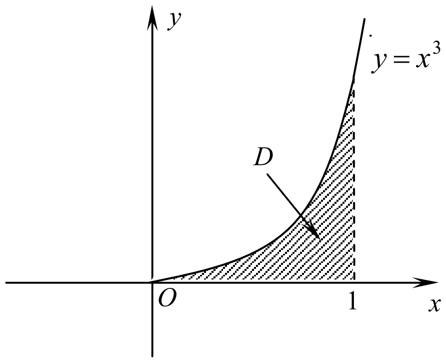
a) D – trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji $y = x^3$, osią Ox oraz prostymi $x = 0$ i $x = 1$,

b) D – obszar ograniczony parabolą $y = x^2 + 4x$ i prostą $x - y + 4 = 0$.

c) D – obszar ograniczony krzywymi: $y = \dfrac{2}{x}$, $y = x + 1$, $y = 1$.

Rozwiązanie.

a)



Rys. 4.

Chcemy obliczyć pole zakreślonego na rysunku 4 obszaru D. Zapiszmy najpierw ten obszar przy pomocy nierówności:

$$D = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^3\}.$$

Pole obszaru D obliczamy korzystając z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej

$$|D| = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

b) W pierwszej kolejności wyznaczamy punkty przecięcia (a właściwie odcięte tych punktów) paraboli $y = x^2 + 4x$ i prostej $x - y + 4 = 0$. W tym celu rozwiązujemy układ równań (względem niewiadomej x)

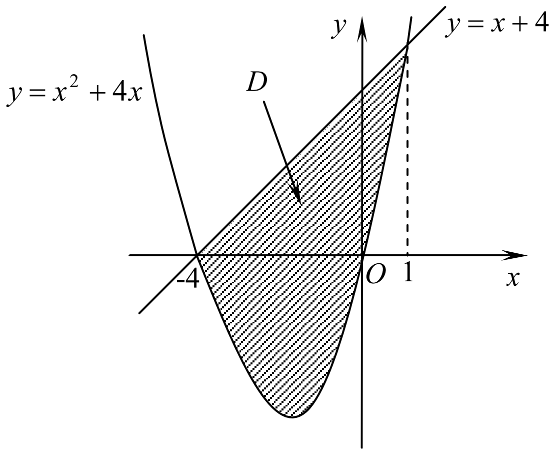
$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}.$$

Przyrównując prawe strony powyższych równań otrzymujemy

$$x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \quad \Delta = 25, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Obszar D (rysunek 5) możemy zatem zapisać w postaci:

$$D = \{(x, y):\ -4 \le x \le 1\ ,\ x^2 + 4x \le y \le x + 4\}$$



Rys 5.

Stosując wzór (4) otrzymujemy

$$|D| = \int_{-4}^{1} \Big[\underbrace{(x+4)}_{\text{"górna" funkcja}} - \underbrace{(x^2+4x)}_{\text{"dolna" funkcja}}\Big]dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx = \left[4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6}\,.$$

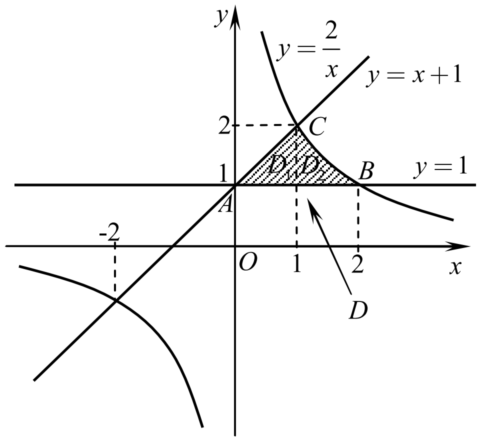
c) Rozwiązując odpowiednie układy równa wyznaczamy najpierw punkty A, B, C (rysunek 6) przecięcia krzywych:

$$y = \frac{2}{x},\ \ y = x + 1\ ,\ y = 1\,.$$

$A:\ \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 1 \end{cases};\ \ x + 1 = 1\,;\ x = 0,\ y = 1;\ \ A(0,1)\,.$

$B:\ \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = 1 \end{cases};\ \ \dfrac{2}{x} = 1\,;\ x = 2,\ y = 1;\ \ B(2,1)\,.$

$C:\ \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = x + 1 \end{cases};\ \ \dfrac{2}{x} = x + 1\,;\ x^2 + x - 2 = 0;\ \ \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{cases},\ \ \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases};\ \ C(1,2)\,.$



Rys 6.

Na podstawie rysunku stwierdzamy, że pole obszaru D będzie sumą pól dwóch obszarów: D_1, D_2. Obszary te zapisujemy przy pomocy odpowiednich nierówności:

$$D_1 = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1\ ,\ 1 \le y \le x+1\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y):\ 1 \le x \le 2\ ,\ 1 \le y \le \frac{2}{x}\right\}.$$

Zatem:

$$|D_1| = \int_0^1 (x+1-1)dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\ ,$$

$$|D_2| = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)dx = \left[2\ln|x| - x\right]_1^2 = \left(2\ln 2 - 2\right) - \left(2\ln 1 - 1\right) = -1 + 2\ln 2\,.$$

Ostatecznie:

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \frac{1}{2} - 1 + 2\ln 2 = -\frac{1}{2} + 2\ln 2\,.$$

W tym przypadku pole obszaru D można było również obliczyć inną metodą, która nie wymagałaby podziału obszaru D na dwa obszary. Można było mianowicie skorzystać z następującej uwagi:

Uwaga. Jeżeli obszar D można zapisać w postaci:

$$D = \{(x,y)\ : c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\},$$

gdzie funkcje g_1 i g_2 zmiennej y są ciągłe w przedziale $\langle c,d \rangle$ oraz $g_1(y) < g_2(x)$ dla każdego $y \in (c,d)$, to pole obszaru D wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy\,.$$

W powyższym przykładzie obszar D można zapisać w postaci:

$$D = \left\{(x,y):\ 1 \le y \le 2\ ,\ y-1 \le x \le \frac{2}{y}\right\}.$$

Zatem

$$|D| = \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - y + 1 \right) dy = \left[2\ln|y| - \frac{1}{2}y^2 + y \right]_1^2 =$$

$$= (2\ln 2 - 2 + 2) - \left(2\ln 1 - \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{1}{2} + 2\ln 2 .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi o równaniach:

19. $y = -x^2 + 3x,\ \ y = 0$,

20. $y = x^2,\ \ 2x - y + 3 = 0$,

21. $y = x^3,\ \ y = 4x$,

22. $y = 2x - x^2,\ \ x + y = 0$,

23. $y = x^2 - x - 6,\quad y = -x^2 + 5x + 14$,

24. $y = \dfrac{4}{x},\ \ x + y = 5$,

25. $y = \mathrm{e}^x,\ \ y = \mathrm{e}^{-x},\ \ x = 1$,

26. $y = x^2,\ \ y^2 = x$,

27. $y = \ln x,\ \ y = 1,\ \ x = \mathrm{e}^3$,

28. $y^2 = x,\ \ y = x - 2$,

29. $y = \dfrac{3}{x}$, $y = x + 2,\ \ y = 1$,

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch